Valoración de Swap Cancelable

Trabajo fin de Máster de Ingeniería Matemática

Autora: Cecilia Pérez Mazuela
Tutor: Gerardo Oleaga Apadula

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, 2014

Índice

Resumen

The pupose of this report is to value a derivative product called Swap Cancellable. In order to do that, we study a new approach proposed by Longstaff and Schwartz for approximating the value of an American option by simulation. Such new method is based on Monte Carlo simulation and the use of Least Squares to give the conditional expected payoff to the optionholder from continuation. This method is called Least Squares Monte Carlo (LSM) and is higlhy useful when we talk about multifactor models and exotic options. In our case we concentrate on giving the value of the cancellation when we assume a unique factor model and compare the result with the value obtained using a binomial tree model. Besides that, we value the option when we have a multifactor model using Least Squares Monte Carlo.

1. Introducción

1.1. Planteamiento del problema

Uno de los problemas más estudiados en el campo de valoración de productos financieros es la evaluación y ejercicio óptimo de productos de tipo Americano. Este tipo de productos se comercializan en los principales mercados financieros: mercado de derivados, seguros, divisas, materias primas, ...

La posibilidad de ejercicio previo a la fecha de vencimiento (ya sea en uno, varios o infinitos instantes temporales), hace que el problema de evaluación y ejercicio óptimo sea complicado. De hecho, a pesar de los recientes avances en técnicas matemáticas para valorar opciones, dicha valoración y ejercicio óptimo de opciones Americanas aún queda como uno de los problemas más desafiantes en el mundo de los derivados en finanzas.

Entre las técnicas de valoración de opciones se encuentran la simulación Monte Carlo, los árboles binomiales y las técnicas de diferencias finitas. La simulación Monte Carlo es, en general, apropiada para valorar opciones dependientes del camino y opciones dependientes de muchas variables estocásticas. Por otro lado, los árboles binomiales y las técnicas de diferencias finitas son más apropiadas para valorar opciones de tipo americano.

Aunque las técnicas básicas de árboles binomiales y de diferencias finitas también se pueden adaptar con el fin de poder usarlas para valorar opciones que sean de tipo americano y, al mismo tiempo, dependientes del camino, en este trabajo se va a proponer una alternativa a las anteriores que incluye simulación Monte Carlo.

La simulación que se va a plantear es una buena opción a la hora de valorar activos, gestionar riesgos financieros y ejercer de manera óptima opciones de tipo Americano. Algunos ejemplos en donde se podría hacer uso de dicha simulación son: en el cálculo del valor de una opción que depende de dos factores, en la valoración de derivados que dependen del camino y de aquellos de tipo americano. En general permite a las variables de estado seguir procesos estocásticos. Además de lo anterior es una buena técnica pues permite realizar computación en paralelo, lo cual disminuye el tiempo de cálculo.

Pensemos en el uso de esta simulación para obtener el valor de una opción Americana. En una opción de este tipo el poseedor compara en cada posible fecha de ejercicio lo que recibiría en el caso de ejercer en ese momento frente a la esperanza del pago si no ejerce y continúa con la opción. La clave de la simulación que vamos a introducir en este trabajo estriba en el uso de cuadrados mínimos para el cálculo de esa esperanza condicionada de los pagos futuros. En concreto, se realizará una regresión para obtener los valores futuros teniendo en cuenta los caminos que ha seguido el valor de las variables de estado. El valor ajustado de esa regresión proporcionará la esperanza condicionada que estamos buscando. Si calculamos mediante esta técnica el valor esperado en cada instante de ejercicio, tendremos al final un planning con la forma óptima de ejercicio de una opción a lo largo de cada posible camino. A partir de los valores anteriores podemos obtener el valor de la opción. Nos referiremos a esta técnica como la técnica LSM (Least Squares Monte Carlo, equivalentemente, Monte Carlo con cuadrados mínimos) [6].

En este trabajo nos vamos a centrar en la valoración de un *swap cancelable*, instrumento que será introducido más adelante. Para dicha valoración usaremos la técnica LSM ya que un swap de este tipo es un producto financiero con opcionalidad Americana.

1.2. Relación con conocimientos adquiridos en el Máster de Ingeniería Matemática

El Máster de Ingeniería Matemática me ha resultado de gran ayuda para poder realizar este trabajo. En concreto se ha hecho uso de las asignaturas de Técnicas de simulación, Métodos Numéricos Avanzados, Fundamentos de Matemática Financiera, Tipos de Interés y Cálculo estocástico y Valoración Financiera.

Para los aspectos técnicos de programación del trabajo me han sido útiles los conocimientos adquiridos por haber cursado la asignatura de Métodos Numéricos, ya que para todos los algoritmos se ha usado MATLAB. La asignatura de Técnicas de Simulación ha sido fundamental ya que se han programado una variación del método de simulación Monte Carlo y un árbol binomial. Mientras que el resto de asignaturas de la rama financiera, han resultado prácticas tanto para comprender las técnicas de valoración y el uso del producto derivado, como para entender el producto financiero y así poder describir una fórmula para valorarlo.

2. Swap

2.1. Definición y propiedades generales

Los primeros contratos swaps se comenzaron a negociar a principios de los años ochenta. Durante los ochenta y noventa éstos fueron la clave para el éxito del mercado de derivados *over-the-counter*. Desde el instante de su aparición en adelante el mercado de swaps ha crecido mucho. De hecho se ha comprobado que es un instrumento financiero muy flexible para cubrir riesgos.

Si nos basamos en el gran número de contratos diferentes que se comercializan hoy en día y en el volumen de transacciones anuales, se podría decir que el swap es una de las más exitosas innovaciones financieras de todos los tiempos.

Definición 2.1. Un *swap* es un producto derivado sobre tipos de interés, que consiste en un acuerdo entre dos partes para realizar intercambios de cantidades de dinero en el futuro. En el acuerdo se definen las fechas en las que se llevarán a cabo los intercambios y la forma en la que se calculan las cantidades que serán intercambiadas. Normalmente, el cálculo de las cantidades a ser intercambiadas involucra el valor de un tipo de interés, un tipo de cambio u otra variable de mercado que se dará en el futuro y que es, por lo tanto, desconocido en ese momento.

Interés variable: LIBOR . El tipo de interés variable más usado en los swaps sobre tipos de interés es el LIBOR (London Interbank Offer Rate). La cotización LIBOR dada por un banco concreto es el tipo de interés al cual el banco está preparado para realizar un depósito a gran escala en otros bancos. Normalmente se cotizan los LIBOR a un mes, tres meses, seis meses y doce meses.

Este tipo de interés es un tipo de referencia en los mercados internacionales para proporcionar préstamos.

Usaremos la notación $L_{t_i}(t_{i+1})$ para referirnos al LIBOR correspondiente al intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ y que fue fijado en el momento t_i.

2.2. Descripción de "plain vanilla swap"

El tipo más común de swaps de tipos de interés son los «*plain vanilla swaps*».

Definición 2.2. Un *plain vanilla swap* consiste en un acuerdo mediante el cual una parte paga flujos de caja iguales a un interés fijado al inicio del swap (interés fijo o strike $\mathcal{K}$) sobre un nocional principal durante un periodo. La otra parte se compromete a pagar interés variable sobre el mismo nocional y el mismo periodo de tiempo. El nocional es el mismo para la rama fija que para la variable.

Es importante notar que el nocional principal no se intercambia en ningún momento. Esta cantidad es únicamente usada para aplicarle los tipos y, a partir de ella, obtener las cantidades que sí son intercambiadas. Dichos intercambios se realizan en fechas fijas, aunque el swap no incluye opcionalidad (es decir, cada parte paga fijo o variable, pero no puede optar a cambiar).

Por lo anteriormente descrito, sabemos que el contrato depende de una sucesión de fechas futuras en las que se realizarán los intercambios:

$$0 < t_0, t_1, ..., t_N$$

Esta sucesión determina N intervalos de tiempo consecutivos (siendo hoy=0 y comenzando en t_0 fecha en que empieza el swap), todos con la misma duración $\triangle t$. Los flujos de caja (o pagos) se realizan al final de cada periodo, es decir, en las fechas de pago:

$$t_1, ..., t_N$$

Al inicio de cada periodo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., N$ se fija el tipo simple a pagar $L_{t_{i-1}}(t_i)$ al final de dicho plazo $\triangle t$ (es decir se fija el tipo variable que se pagará en t_i).

Si el nominal es $\mathcal{N}$ y el strike es $\mathcal{K}$, *a* tiempo t_i la rama variable paga:

$$\mathcal{N} \times \triangle t \times L_{t_{i-1}}(t_i) \; i = 1, ..., N \tag{1}$$

mientras que la rama fija paga:

$$\mathcal{N} \times \triangle t \times \mathcal{K} \tag{2}$$

La porción de instrumento que recoge los pagos del periodo $[t_{i-1}, t_i]$ se conoce como *swaplet*. El strike (tipo fijo) $\mathcal{K}$ se fija para que el valor del swap en el momento de firmar el contrato sea cero, es importante notar que dicho tipo fijo permanece constante a lo largo de la vida del swap.

2.3. Valoración de Swap Vanilla

Los instrumentos derivados del tipo de interés, son instrumentos financieros cuyos pagos dependen de alguna forma de la curva de tipos de interés. Como el tipo de interés es una cantidad variable que no sabemos qué valor tomará en un futuro, la valoración de estos productos financieros se convierte en un desafío para aquellos que se dedican a comercializarlos.

La valoración de instrumentos derivados del interés tiene algunas diferencias significativas con la valoración de derivados sobre acciones, de hecho su valoración es más complicada por diversas razones:

- El comportamiento de un tipo de interés es más complicado que el comportamiento de un producto de mercado o un tipo de cambio.
- Para valorar muchos de estos productos financieros, es necesario el desarrollo de un modelo que describa totalmente el comportamiento de la curva de tipos.
- La volatilidad cambia según avanzamos en la curva de tipos.
- Los tipos de interés se usan tanto para descontar cantidades de dinero como para definir lo que te paga el producto derivado.

Lo primero que hemos de tener en cuenta a la hora de valorar un swap es que a la hora de firmar un contrato de este tipo, es decir, en el momento inicial, el swap vale cero. Después de que haya existido por un tiempo y debido a las variaciones en el mercado su valor se puede hacer positivo o negativo.

Hay dos posibles formas de valorar un swap. La primera forma toma al swap como la diferencia entre dos bonos; la segunda lo toma como una cartera de FRAs.

2.3.1. Valoración en términos de Bonos

Como ya se ha comentado previamente el nocional principal no cambia de manos en un swap. Sin embargo, podemos asumir que los pagos de principal sí se realizan al final de la vida del swap sin cambiar el valor del mismo.

Ya hemos hablado anteriormente de la forma que tienen los pagos de la rama fija y variable en un instante temporal concreto del swap. Para fijar el valor de $\mathcal{K}$ valoraremos las dos ramas del swap y tomaremos $\mathcal{K}$ para que valgan lo mismo (principio de no arbitraje).

Veamos cuánto vale un pago de la rama variable usando bonos. La idea es replicar el valor dicho pago $\mathcal{N}\triangle tL_{t_{i-1}}(t_i)$ mediante la compra/venta de bonos cupón cero. El objetivo es tener la cantidad $\mathcal{N}\triangle tL_{t_{i-1}}(t_i)$ en el momento t_i.

Empezamos en tiempo inicial 0, compramos $\mathcal{N}$ bonos cupón cero con vencimiento t_{i-1} es decir $\mathcal{N}P_0(t_{i-1})$, por lo tanto en el momento t_{i-1} tenemos la cantidad $\mathcal{N}$. En ese instante depositamos esa cantidad en el banco a tipo variable $L_{t_{i-1}}(t_i)$ para obtener en t_i la cantidad $\mathcal{N}(1 + \triangle t\, L(t_i))$.

Es decir, en tiempo t_i tenemos $\mathcal{N} + \mathcal{N}\triangle t\, L(t_i)$ lo cual es $\mathcal{N}$ más que lo que queríamos. Para quitar esos $\mathcal{N}$ de más lo único que tenemos que hacer es vender $\mathcal{N}$ bonos cupón cero con vencimiento t_i, equivalentemente $-NP_0(t_i)$.

Replicaríamos la rama variable con:

$$\mathcal{N}(P_0(t_{i-1}) - P_0(t_i)) \tag{3}$$

Para replicar la rama fija, basta con ver cómo es el pago al final del intervalo, esto es:

$$\mathcal{N} \triangle t \mathcal{K} P_0(t_i) \tag{4}$$

Si sumamos todos los pagos e igualamos los de la rama fija a los de la variable obtenemos:

$$\mathcal{N} \sum_{i=1}^{N} \triangle t \mathcal{K} P_0(t_i) = \mathcal{N} \sum_{i=1}^{N} (P_0(t_{i-1}) - P_0(t_i)) = \mathcal{N} x (P_0(t_0) - P_0(t_N)) \tag{5}$$

de modo que

$$K = s_0 = \frac{P_0(t_0) - P_0(t_N)}{\sum_{i=1}^{N} \triangle t P_0(t_i)} \tag{6}$$

donde s_0 es el tipo swap en el instante t=0. En general se tendrá que el *tipo swap* a tiempo t es:

$$s_t = \frac{P_t(t_0) - P_t(t_N)}{\sum_{i=1}^{N} \triangle t P_t(t_i)} \ (t < t_0) \tag{7}$$

2.3.2. Valoración en términos de FRAs.

Hay otra otro modo de encontrar el tipo swap teniendo en cuenta los precios de cada uno de los FRA que forman el swap. El precio actual de cada uno de ellos es:

$$P_0(t_i)\Delta t(\mathcal{K} - L_0(t_{i-1}, t_i))\mathcal{N} \quad i = 1, ..., N \tag{8}$$

Si sumamos para todos los pagos queda

$$\mathcal{N} \Delta t \sum_{i=1}^{N} P_0(t_i)(\mathcal{K} - L_0(t_{i-1}, t_i)) \tag{9}$$

por lo descrito anteriormente igualamos a cero el valor del swap a tiempo 0:

$$\mathcal{K} \sum_{i=1}^{N} P_0(t_i) = \sum_{i=1}^{N} P_0(t_i) L_0(t_{i-1}, t_i) \tag{10}$$

despejando $\mathcal{K}$, obtenemos:

$$\mathcal{K} = s_0 := \frac{\sum_{i=1}^{N} P_0(t_i) L_0(t_{i-1}, t_i)}{\sum_{i=1}^{N} P_0(t_i)} = \sum_{i=1}^{N} w_i L_0(t_{i-1}, t_i) \tag{11}$$

donde

$$w_i := \frac{P_0(t_i)}{\sum_{j=1}^{N} P_0(t_j)} \tag{12}$$

son pesos que satisfacen:

- $0 \leq w_i \leq 1$.
- $\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$.

Por lo tanto podemos interpretar a s_0 como un promedio ponderado de tipos forward, definidos por los intervalos temporales de los swaplets. Nótese que t_i con $i > 1$ son las fechas de intercambios de intereses.

2.4. Usos de Swap.

- Transformación de obligación:

Los swaps nos permiten transformar las obligaciones que tenemos cuando se ha pedido un préstamo, tanto a interés fijo como a interés variable.

Supongamos que el préstamo lo firmamos con un interés fijo, pero con el paso del tiempo el interés variable ha bajado mucho y se ha situado muy por debajo del interés que pagas en la actualidad, en este caso el swap da la oportunidad de transformar el interés fijo en variable y pasar a pagar la cantidad más baja.

Si nos encontramos en el caso opuesto, es decir, firmamos un préstamo por el que estaremos pagando un interés variable. Supongamos ahora que el interés variable sube muchísimo llegando a unos límites muy por encima de lo que te puedes permitir pagar, en este caso el swap te permite pasar a pagar un interés fijo que ya fijaste al principio de firmar el contrato swap.

Ilustremos lo anterior con un ejemplo: supongamos que nos dan un préstamo y debemos pagar un tipo de interés dado por $euribor + x$ anualmente. Podemos transformar el préstamo en uno de tipo fijo entrando en un swap. Sea un swap definido por el strike $\mathcal{K}$ y las mismas fechas de pago de préstamo, que paga variable con tipo euribor al final de cada año y recibe a tipo fijo$\mathcal{K}$. Al final de cada periodo nuestro flujo de caja viene dado por (tomando nocional 1):

$$\textit{pagamos euribor} + x \rightarrow \textit{al banco}$$

$$\textit{pagamos } \mathcal{K} \rightarrow \textit{al swap}$$

$$\textit{recibimos euribor} \rightarrow \textit{del swap}$$

El flujo variable que teníamos con el banco se transforma en un pago por una cantidad

$$\mathcal{K} + x$$

que es el tipo fijo que pagamos al combinar el préstamo y el swap.

- Transformación de un activo:

Los swap también se pueden utilizar para cambiar la naturaleza de un activo. Supongamos que tenemos un activo que paga interés fijo, mediante la adquisición de un swap podría empezar a pagar interés variable. Se podría transformar también de variable a fijo. Dicha transformación es muy similar a la explicada en la parte de transformación de obligaciones.

- especulación:

Como todos los activos financieros, los swaps también se usan para especular. La *especulación* consiste en hacer apuestas sobre estados futuros del mercado, es decir, consiste en apostar sobre el estado del mercado en un futuro. Esta especulación no es mala, ya que sirve para equilibrar los precios en el mercado.

A pesar de la existencia de la especulación, la principal función de los swaps es la de cubrir los riesgos.

2.5. Variaciones del "plain vanilla swap"

Gran parte de los swaps involucran pequeñas variaciones de lo que ha sido introducido en la sección 2.1. («*plain vanilla swap*»). En algunos swaps el nocional cambia con el tiempo de forma predeterminada.

Definición 2.3. Aquellos swaps para los que el nocional es una función creciente con el tiempo se conocen con el nombre de *step-up swaps*. En cambio, aquellos para los que el nocional es una función decreciente del tiempo se conocen como *amortizing swaps*.

Los *step-up swaps* pueden ser útiles para una empresa de construcción ya que necesitará pedir prestadas crecientes cantidades de dinero sobre las que pagará un interés variable para financiar un proyecto en particular. Por lo tanto a la compañía le podría convenir el convertir a fijos esos tipos de interés variables.

Los *amortizing swaps* pueden ser usados por una compañía que en la actualidad paga interés fijo sobre un crédito con cláusulas prepago y quiere cambiar ese interés fijo a uno variable.

Otra variante es que el principal puede ser distinto para las dos partes que entran en un swap. También la frecuencia de pago podría ser distinta para las dos partes. Este tipo de modificaciones en *plain vanilla swaps* no modifican la forma en la que se valoran. Es decir, todavía asumimos que se dan los tipos forward.

Es importante notar también que el tipo variable que se aplica en los swaps no es siempre LIBOR. En algunos casos, por ejemplo, se usa *commercial paper (CP) rate.*

Definición 2.4. Los *basis swaps* involucran intercambios de dinero calculados usando tipos de interés variable distintos para las dos partes.

Los *basis swaps* podrían ser usados por una entidad financiera cuyos activos y obligaciones dependen de distintos tipos de interés.

Los swaps para los que el tipo de interés variable no es LIBOR también pueden ser valorados asumiendo que se dan los tipos forward. Será necesario el conocimiento de otra curva de tipos de interés para calcular los flujos de caja bajo la hipótesis de tipos de interés forward. Los descuentos de los flujos de caja se hacen usando el LIBOR.

2.6. Opción bermuda.

El instrumento que valoraremos en este trabajo entra en la clase de opciones de tipo «bermuda», que definimos a continuación.

Definición 2.5. Una *opción bermuda* es una opción exótica pues incluye una opcionalidad de tipo Americana, pero cuyo ejercicio está restringido a un conjunto de fechas fijas.

A diferencia de la opción Americana usual, la opción bermuda no se puede ejercer en cualquier momento de la vida de la misma.

Éste es el caso de un contrato swap que incluya una opción de cancelación en cada fecha de pago. De hecho la opción de cancelación de un swap es equivalente a *la opción de comprar un swap opuesto al que poseemos, en cualquier instante de intercambio de intereses.*

3. Swap Cancelable

3.1. Definición de Swap Cancelable

Definición 3.1. Un *swap cancelable* es un *swap vanilla* en el que una de las partes tiene la opción de terminar el contrato en una o más de una fecha de pago (es decir, nos encontramos con una opcionalidad Americana).

La cancelación de un swap es equivalente a entrar en un swap opuesto con los mismos parámetros del swap que queremos cancelar.

Por ejemplo, imaginemos que tenemos dos compañías A y B que firman un swap. Si A tiene la opción de cancelar en una fecha concreta posterior, podemos considerar esta opción como: un swap normal (vanilla) más una posición larga en un swap opuesto al anterior. Si, por el contrario la compañía B tiene dicha opción de cancelación, A tiene un swap vanilla más una posición corta en una opción de entrar en el swap opuesto.

En el caso de que haya una única fecha de cancelación, se puede considerar el swap como un swap vanilla más una posición larga/corta (dependiendo de rama fija/variable) en una opción swap Europea. Sin embargo, cuando el swap puede ser cancelado en distintas fechas futuras de pago, se puede considerar como un swap vanillla (normal) más una opción swap Bermuda.

3.2. Valoración de Swap Cancelable

La opción de cancelación no es una opción para entrar en un swap a un tipo swap definido en el contrato, sino que es un instrumento que te permite anular en cualquier instante el swap que ya firmaste. En cada instante de posible cancelación el valor del swap que firmaste al principio va variando. De hecho el valor de la cancelación en cada camino será el valor del swap inicial en el momento de cancelarlo (es importante notar que el swap se cancelará máximo una vez en cada camino), comprobaremos este hecho más adelante.

Recordemos que en el instante en que se firma el swap el valor del mismo es cero (escogíamos el interés fijo a pagar K para que esto fuese cierto). Para valorar el *swap vanilla* en un instante posterior a la fecha en que se firmó hay que tener en cuenta todos los pagos que quedan por hacer desde ese instante en adelante, dichos pagos serán descontados al instante actual.

Asumimos que el valor del swap en un instante concreto se calcula después del pago que corresponda a ese instante, es decir, la opción de cancelación afectará a los pagos futuros y no a los actuales. Por lo tanto, la valoración es idéntica a la de una opción Americana sobre un activo, aunque en este caso el subyacente es el precio del swap firmado al inicio.

En la *sección* 5 valoraremos un *swap cancelable* usando la técnica de Least Squares Monte Carlo (LSM). Debido a que el algoritmo de Cuadrados Mínimos con Monte Carlo y su aplicación al caso concreto del *swap cancelable* es el tema central de este trabajo, se explicará con todo detalle la valoración de la cancelación y los flujos de caja de cada instante temporal para un *swap cancelable* una vez se conozca el algoritmo de valoración.

4. Algoritmo LSM

En esta sección se va a realizar una descripción general del método LSM [6] que fue introducido al inicio de este trabajo. El marco de evaluación se basa en el paradigma de valoración de derivados, Black Scholes.

4.1. Marco de valoración

Vamos a asumir el espacio de probabilidad total $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y un horizonte de tiempo finito $[0, T]$, donde Ω es el conjunto de todas las posibles realizaciones de los procesos estocásticos entre el momento inicial y el tiempo T. Los elementos simples de Ω, los denotamos como ω y representan un camino (realización) de proceso estocástico, $\mathcal{F}$ es la sigma álgebra de distintos eventos a tiempo T, y P es la medida de probabilidad definida sobre los elementos de $\mathcal{F}$. Definimos una filtración $F = \{\mathcal{F}_t; t \in [0, T]\}$ y asumiremos que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Para ser consistentes con el principio de no arbitrariedad, asimismo asumimos la existencia de una medida martingala Q en este marco.

Estamos interesados en evaluar productos derivados con opcionalidad Americana, y con flujos de caja aleatorios que ocurren en el periodo $[0, T]$.

Introducimos la siguiente notación para denotar el camino seguido por los flujos de caja generados por la opción $C(\omega, s; t, T)$, condicionado a que la opción no ha sido ejercida en el instante de tiempo t ni anteriormente. También asummimos que el propietario de la opción elige la forma de ejercicio óptima en cada tiempo s tal que $t < s \leq T$.

El objetivo del algoritmo de LSM es proporcionar una aproximación de la forma óptima de ejercicio/cancelación que maximice el valor de la opción Americana. Suponemos por simplicidad y mejor comprensión del algoritmo que la opción Americana se puede ejercer solamente en un conjunto finito de momentos temporales $0 < t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_K = T$ (es decir, opción Bermuda), y consideramos en cada uno de esos momentos temporales la forma óptima de ejecución.

En la práctica muchas de las opciones Americanas pueden ejercerse en cualquier instante de tiempo; el algoritmo LSM puede usarse también para obtener el valor de dichas opciones sin más que tomar una partición del espacio temporal lo suficientemente pequeña.

Para el caso general de opción Americana, en el vencimiento de la opción, el propietario decidirá ejercerla únicamente si está *in the money* (tiene valor), o la dejará que expire si está *out of the money* (no tiene valor). En cada posible momento de ejercicio anterior al vencimiento, sin embargo, el propietario de la opción debe elegir si desea ejercerla inmediatamente o bien continuar con la opción sin ejercer y volver a preguntarse lo mismo en la siguiente fecha de posible ejercicio. El valor de la opción será el máximo en cada camino, y único, si el inversor decide ejercer en el momento (instante temporal) en que el pago actual es mayor o igual a los pagos futuros.

En el instante temporal t_i, el flujo de caja del ejercicio inmediato de la opción es conocido por el inversor, y el valor del ejercicio inmediato simplemente se ha de igualar a dicho valor. Los flujos de caja que se obtienen si se continúa con la opción no se conocen en el instante t_i. La teoría de valoración basada en el principio de no arbitraje, sin embargo, proporciona un valor para los pagos si no ejerces la opción (es decir, si asumimos que no puede ser ejercida hasta después de t_i). Ese valor viene dado por la esperanza bajo la medida neutral al riesgo Q de los pagos futuros restantes $C(w, s; t_i, T)$, descontados a tiempo actual. Por lo tanto, en el instante t_i, el valor de los pagos si continuamos con la opción $F(\omega; t_i)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$F(\omega; t_i) = E_Q[\sum_{j=i+1}^{K} \exp(-\int_{t_i}^{t_j} r(\omega, s)ds) C(\omega, t_j; t_i, T)|\mathcal{F}_{t_i}] \tag{13}$$

donde $r(\omega, s)$ es el tipo de descuento, y la esperanza está condicionada a la información que tenemos hasta el momento t_i dada en $\mathcal{F}_{t_i}$. Gracias a esta representación, el problema de ejercicio óptimo de la opción se reduce a comparar en cada instante de tiempo el valor de ejercer inmediatamente la opción, frente al valor de esa esperanza condicional. Se ejercerá la opción, por lo tanto, tan pronto como el valor de ejercicio sea positivo (*in the money*) y mayor o igual que dicha esperanza condicional.

4.2. Algoritmo

Como ya se ha mencionado previamente, el algoritmo LSM utiliza cuadrados mínimos para obtener la esperanza condicionada en los instantes $t_{K-1}, ..., t_1$ (el valor es conocido en los instantes inicial t_0 y final t_K). Iremos obteniendo todos los flujos de caja $C(\omega, s; t, T)$ de forma recursiva, comenzando con el vencimiento y yendo hacia atrás. Notemos que $C(\omega, s; t_i, T)$ puede ser distinto de $C(\omega, s; t_{i+1}, T)$ ya que la acción óptima podría ser ejercer en el momento t_{i+1}, cambiando de esta forma todos los pagos posteriores en ese mismo camino ω.

Asumimos que en el momento t_{i-1}, la función $F(\omega; t_{i-1})$ de pagos futuros (solo hay pagos si no se ha ejercido la opción anteriormente), se puede representar como una combinación lineal de un conjunto de funciones base $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$(esta hipótesis se podría justificar de forma teórica pero no es el propósito de este trabajo).

Para ilustrar lo anterior veamos un ejemplo simple, suponemos que la X sigue un proceso de Markov (por su naturaleza sabemos que solo necesitamos los valores actuales de las variables de estado y no necesitamos las realizaciones pasadas de las mismas). Una posible elección de funciones base es el conjunto de polinomios de Laguerre:

$$L_n(X) = \exp(-X/2)\frac{e^X}{n!}\frac{d^n}{dX^n}(X^n e^{-X}) \tag{14}$$

a partir de las funciones base anteriores podríamos representar $F(\omega; t_{i-1})$ de la siguiente manera:

$$F(\omega; t_{i-1}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j L_j(X) \tag{15}$$

en donde a_j son constantes.

Hay muchos otros tipos de funciones que podrían usarse como funciones base, por ejemplo: funciones de Hermite, polinomios de Legendre, Chebysheb, Gegenbauer y polinomios de Jacobi. Algunos test numéricos han indicado que series de Fourier o trigonométricas e incluso potencias de las variables de estado, también proporcionan buenos resultados [6].

Para implementar el algoritmo LSM, aproximaremos $F(\omega; t_{i-1})$ usando las primeras $M < \infty$ funciones base, y denotaremos a dicha aproximación como $F_M(\omega; t_{i-1})$. Una vez que este subconjunto de funciones base ha sido especificado, $F_M(\omega; t_{i-1})$ se estima realizando una regresión de los valores descontados de $C(\omega, s; t_{i-1}, T)$ sobre las funciones base. Para dicha regresión usaremos solo los valores de los caminos para los que la opción está *in the money* en el momento t_{i-1}. El uso de únicamente los caminos para los que la opción está *in the money*, se debe a que la decisión de ejercer o no se toma sólo en esas circunstancias. Si nos centramos únicamente en los caminos para los que la opción está *in the money*, limitamos la región para la cual la esperanza condicionada debe ser calculada, así necesitaremos muchas menos funciones base para obtener una buena aproximación de la función de esperanza condicionada.

Debido a que los valores de las funciones base son independientes e idénticamente distribuidos a lo largo de los caminos, hipótesis no muy fuertes acerca de la existencia de momentos nos permiten usar el teorema 3.5 de White (1984) (véase [6]) para mostrar que el ajuste de la regresión $\widehat{F}_M(\omega; t_{i-1})$ en media cuadrática y en probabilidad a $F_M(\omega; t_{i-1})$ conforme el numero de caminos *in de money* va a infinito. De hecho también se podría demostrar que $\widehat{F}_M(\omega; t_{i-1})$ es el mejor estimador insesgado de $F_M(\omega; t_{i-1})$.

Una vez que se ha estimado la función de esperanza condicionada a tiempo t_{i-1}, podremos determinar si el ejercicio de la opción previo vencimiento es óptimo en un camino ω *in the money* en ese momento. Para tomar dicha decisión se habrá de comparar el valor de la opción por el ejercicio inmediato con el valor de $\widehat{F}_M(\omega; t_{i-1})$, y repetir todo esto para todos los caminos *in the money* de la simulación. Una vez se ha identificado la acción a seguir en el momento t_{i-1}, podremos aproximar los flujos de caja de la opción en el instante anterior

$C(\omega, s; t_{i-2}, T)$. Continuamos con la recursión moviéndonos un paso atrás en el tiempo t_{i-2} y repetimos el proceso hasta que todas las decisiones de ejercer o no se hayan determinado para todos los caminos de la simulación.

A partir de lo anterior, la opción Americana se valora comenzando por el momento inicial y moviéndonos hacia adelante a lo largo de cada camino hasta que el instante de primer ejercicio ocurra. Dentro de un camino, descontamos todos los flujos de caja desde el momento de ejercicio hasta cero (es importante notar que para el *swap cancelable* únicamente habrá un flujo de caja positivo si se ha ejercido la opción, en otro caso todos los flujos de caja serán cero). El valor de la opción será la media de todos los valores descontados en todos caminos ω.

En el caso en que nos encontremos con dos variables de estado X e Y, como será nuestro caso, el conjunto de funciones base debe incluir términos en X y en Y, así como productos cruzados de las mismas. Pasa lo mismo para problemas con dimensiones grandes. Intuitivamente podríamos decir que el número de funciones base necesario crece con las dimensiones del problema. En la práctica, sin embargo, hay razones teóricas por las que el número de funciones base necesario para obtener el deseado nivel de convergencia no crece tan rápidamente. Existen publicaciones que muestran que mediante el uso de un conjunto de polinomios completos, se obtiene grado de convergencia k asintóticamente usando un número de términos que crece solo polinómicamente con la dimensión del problema [6].

5. Valoración de Swap Cancelable con el algoritmo LSM

En esta sección vamos a explicar cómo usar la técnica LSM [1] para valorar un *swap cancelable.* Nos vamos a centrar en el caso en que nos encontremos con un modelo de tipos de interés de uno y de dos factores.

5.1. Swap Cancelable

Recordemos que un swap de este tipo nos da la opción de, en cualquier momento (opción Bermuda), poder cancelar el swap o, equivalentemente, entrar en un swap opuesto.

Suponemos que la parte que tiene la opción de cancelación del swap es aquella que paga interés fijo. Por lo tanto en cada instante t en que debe decidir si ejercer o no la opción de cancelación, el valor de cancelar en el instante t será el valor de los flujos de caja que quedan $(F(\omega;t))$. Es decir, el valor del *swap cancelable* en el instante t es la diferencia entre lo que se recibirá de interés variable, menos lo que pagará de fijo hasta el vencimiento T.

Para el intercambio de dinero que tiene lugar en el momento t_i, habíamos obtenido que la rama fija de un swap tenía valor a día de hoy (tomando $\mathcal{K} = s_0$):

$$\mathcal{N} \triangle t s_0 P_0(t_i) \tag{16}$$

mientras que para la rama variable se tenía:

$$\mathcal{N}(P_0(t_{i-1}) - P_0(t_i)) \tag{17}$$

Por lo tanto en el momento t, sumando todos los pagos que faltan por hacer desde ese momento hasta T tenemos para la rama fija:

$$\sum_{f=t+\Delta t}^{T} \mathcal{N} \triangle t s_0 P_t(f) = A_t \mathcal{N} s_0 \tag{18}$$

en donde se ha hecho el cambio de notación $\sum_{f=t+\Delta t}^{T} \triangle t\, P_t(f) = A_t$ (se corresponde con una anualidad).

Para la rama variable, el valor de los pagos que faltan por hacer es:

$$\mathcal{N}(\underbrace{P_t(t)}_{1} - P_t(T)) \tag{19}$$

[1] Ver el apéndice para el método Monte Carlo general.

multiplicamos y dividimos la ecuación *(19)* por $\Delta t A_t$ siendo A_t anualidad en t , nos queda:

$$\mathcal{N}(1 - P_t(T)) = \frac{(1 - P_t(T))}{A_t}\mathcal{N}A_t = s_t\mathcal{N}A_t \tag{20}$$

donde se ha introducido la notación s_t de *tipo swap*, que había sido definida con anterioridad en 7 de la sección de *swap vanilla.*

Es importante notar que si se ejerce la opción de cancelación, ésta afecta a los pagos de los instantes siguientes y no a los pagos del momento actual. Es decir, suponemos que en cada instante lo primero que se hace es el intercambio de los intereses y posteriormente se decide si cancelar o no la opción.

El swap que se firmó al principio tiene como valor en el instante t la diferencia entre lo que paga la rama variable (flujos de caja entrantes) menos lo que paga la rama fija (flujos de caja salientes):

$$Swap_t = \text{Variable} - \text{Fijo} =$$

$$= s_t\ A_t\ \mathcal{N} - A_t\ \mathcal{N}s_0 = \mathcal{N}\ A_t(s_t - s_0) \tag{21}$$

De la fórmula *21* se puede obtener el valor de la opción de cancelación en el instante temporal t. La rama fija (que es la que posee la opción de cancelación), deberá decidir en cada instante t si es más ventajoso ejercer la opción en ese instante o esperar. En el caso en que t sea igual a la fecha de vencimiento T, el valor de la opción de cancelación es cero (no está *in the money*). Esto es debido a que la cancelación empieza a afectar a los pagos de la siguiente fecha de ejercicio y, si estamos en la fecha de vencimiento, no hay más fechas futuras de ejercicio.

Anteriormente al ejercicio, sin embargo, en cada instante temporal se debe comparar el valor del ejercicio en ese momento (valor de $Swap_t$) con el valor de los flujos de caja esperados en ese camino, y ejercer la opción en el caso de que sea más ventajoso que esperar.

Se pueden dar varios casos para el valor $Swap_t$ del subyacente (swap que se firmó al inicio) en el momento t (valor dado por (21)). Casos posibles:

- $Swap_t = 0$: es bastante obvio que en este caso no conviene ejercer la opción de cancelación, ya que el hecho de entrar en un swap opuesto en ese momento también valdrá cero (no esperas ni ganancias ni pérdidas).

- $Swap_t > 0$: en ese caso tus ganancias están siendo positivas (vas a pagar menos de lo que recibes) y tampoco conviene ejercerla.

- $Swap_t < 0$: ahora sí estás incurriendo en pérdidas. En este caso la opción de cancelación está *in the money* y habría que plantearse si es más conveniente ejercer la opción o esperar porque la esperanza de pagos futuros sea mayor. De aquí obtenemos que el valor del ejercicio en un instante concreto será exactamente $-S$.

Se tiene, por lo tanto, que en el caso en que se ejerza la opción en el instante t su valor es:

$$\max\{-Swap_t, 0\} \tag{22}$$

pues si no tiene valor no ejerces la opción, y en el caso en que la ejerzas pagas exactamente lo que vale en ese momento, es decir, $Swap_t$.

En el caso de que la opción esté *in the money*, el valor obtenido en (22) es el que compararemos con el valor de la esperanza de pagos futuros condicionada que mencionamos antes en todos los instantes temporales en los que se debe decidir si ejercer o no la opción. La clave está pues en encontrar la esperanza condicionada de los pagos futuros. Dicha esperanza se calcula realizando una regresión en un conjunto de funciones base de los valores de la opción descontados a ese momento sobre los valores de las variables de estado.

En esta valoración nos encontramos con los instantes especiales de ejercicio:

- $t = T$, pues en ese instante la opción de cancelación vale cero. El motivo es que al cancelar un swap de este tipo los pagos empiezan a hacerse en el siguiente periodo y, por lo tanto, en el instante de vencimiento no se puede ejercer la opción.

- $t = T - \Delta t$, en ese caso no habría que realizar la regresión pues los valores de la opción en el momento siguiente son 0. Lo único que tenemos que decidir es si ejerceríamos en ese momento (es decir, si el valor de (22) es positivo) sin tener que compararlo con la esperanza de pagos futuros.

- $t = 0$, el subyacente $Swap_t$ vale cero ya que acabamos de firmar ese swap y tiene valor cero al inicio, por lo tanto no nos planteamos la cancelación en ese instante.

En resumen tenemos que el swap que firmamos al inicio comienza valiendo cero pero conforme avanza el tiempo el valor del mismo se hace positivo o negativo, dependiendo de si la rama variable (que nos pagan) es más cara o más barata que la rama fija (que pagamos). Por lo tanto, necesitamos conocer el precio de la rama variable (asociada a las fechas de pago que quedan) en cada instante y para cada camino. El precio de la rama variable viene dado por:

$$s_t \Delta t \mathcal{N} \sum_{f=\text{fechas de pago}} P_t(f) \tag{23}$$

y el precio de la rama fija viene dado por la misma expresión, pero reemplazando s_t por s_0, es decir, por el tipo swap que fijamos al principio del intervalo:

$$s_0 \Delta t \mathcal{N} \sum_{f=\text{fechas de pago}} P_t(f) \tag{24}$$

El valor del swap para nosotros viene dado por la diferencia entre estos dos valores:

$$\text{Swap}_t = (s_t - s_0) \mathcal{N} A_t \tag{25}$$

donde $A_t \equiv \Delta t \sum_{f=\text{fechas de pago}} P_t(f)$. Si esta cantidad es positiva, la cancelación anticipada no nos aporta ninguna ganancia, todo lo contrario, pues perdemos el valor positivo del instrumento. Si es negativa, podemos plantearnos su cancelación, ya que el valor de los pagos fijos que tenemos que realizar es mayor que el valor actual de los pagos variables que nos darán. En ese caso podemos optar a recibir la cantidad:

$$\text{Cancelación anticipada}_t := \mathcal{N} \max(-(s_t - s_0) A_t, 0) \tag{26}$$

Sin embargo, este valor no es necesariamente óptimo. Para comprobar si lo es, debemos compararlo con el valor actual de los posibles pagos futuros *si no se ejerce la opción de cancelación en el instante actual*. Si llamamos «Valor de continuación» a esta cantidad, entonces el precio de la opción de opción de cancelación OC_t viene dado por:

$$OC_t = \max(\text{Cancelación anticipada}_t, \text{Valor de continuación}_t) \tag{27}$$

6. Aplicación

Vamos a valorar la *opción de cancelación de un swap* que ha sido descrita anteriormente. Dicha valoración ha sido realizada escogiendo dos modelos distintos para el tipo de interés variable (LIBOR): modelo de Vasicek de un factor y modelo de Vasicek de dos factores.

Para el primer modelo de tipo de interés también se ha valorado la opción de cancelación usando un árbol binomial, esta implementación se ha llevado a cabo para así poder comparar los precios con los obtenidos mediante la simulación de LSM. En el segundo caso, en lugar de escoger un modelo de tipos de interés de un factor, se ha implementado un modelo de tipos de interés de dos factores. Debido a la complejidad de este modelo, únicamente se ha valorado la opción usando la técnica de LSM.

6.1. Swap con modelo de un factor

Estudiamos la valoración de un swap asumiendo que el tipo variable *LIBOR* viene dado por la curva de tipos determinada por un modelo simple de un factor.

El *swap cancelable* tiene como fecha de vencimiento T años sobre un nocional fijo e igual a \$100 y se puede ejercer la opción de cancelación mensualmente, es decir, tenemos incrementos de tiempo $\Delta t = 1/12$.

Asumimos, que la contrapartida con el derecho a cancelar el swap es la que paga el interés fijo. Asimismo, asumimos que la contrapartida que paga interés variable paga *LIBOR*. Suponemos que el *LIBOR* viene dado por la curva de tipos determinada por un modelo simple de un factor de Vasicek, i.e. el tipo X sigue el siguiente modelo:

$$dX = (\alpha - \beta X)dt + \sigma dZ$$

donde α, β, σ son constantes [2] y Z un movimiento Browniano. Este modelo se puede integrar de forma relativamente sencilla [3].

Para este modelo se tiene:

$$E[X(T)|X(t) = X] = \frac{\alpha}{\beta} + (X - \frac{\alpha}{\beta})e^{-\beta(T-t)}$$

El precio de un bono cupón cero que paga uno en el vencimiento se puede demostrar [9] que viene dado por:

[2] Los valores para los parámetros que se han escogido son $\alpha = 0{,}0525; \beta = 1{,}0; \sigma = 0{,}00867$.
[3] Consultar apéndice para la integración del modelo.

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)X(t)}$$

donde *para* $\beta \neq 0$:

$$A(t,T) = exp[\frac{(B(t,T) - T + t)(\beta\alpha - \sigma^2/2)}{\beta^2} - \frac{\sigma^2 B(t,T)^2}{4\beta}]$$

$$B(t,T) = \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta}$$

6.1.1. Valoración con LSM

Se ha programado el algoritmo LSM usando *Matlab* [4] y se ha aplicado a un *swap cancelable*. Se han simulado 2500 caminos [5].

Recursión para LSM:

Comenzamos por el momento $T - 2\Delta t$ y avanzamos hasta tiempo Δt. Como ya hemos comentado antes en T la opción siempre vale cero, mientras que en $(T - \Delta t)$ se ejerce la opción si está *in the money*, sin compararla con la esperanza condicionada ya que en el momento posterior el valor es cero.

A partir de ese instante tomamos como fecha de ejercicio en todos los caminos de la simulación el instante $(T - \Delta t)$ e iremos cambiando dicho valor si el ejercicio previo es ventajoso. Notemos que el hecho de fijar esa fecha de ejercicio no introduce error pues:

- en T ya no podemos ejercer la opción.
- en caso de que la opción no se ejerza en ningún instante en todo el camino es porque en el momento $(T - \Delta t)$ la opción vale cero. Aunque hayamos fijado el instante de ejercicio a $(T - \Delta t)$, al hacer la esperanza de ese valor a tiempo cero se obtiene cero. Por lo que ese camino no aportará nada al valor de la opción.

En cada instante s tal que $t_0 < s < (T - \Delta t)$, nos preguntaremos si el valor de la opción es positivo, en cuyo caso deberemos compararlo con el valor de la opción en caso de no ejercer en ese instante (la esperanza condicionada).

Para el cálculo de la esperanza condicionada tomamos el valor de las variables de estado en ese instante s y el valor de la opción en ese camino descontado al

[4] Consultar apéndice: código Matlab.

[5] En apéndice: *Simulación Monte Carlo* para ver método de generación de variables aleatorias.

instante actual s. El valor de la opción en ese camino es el valor de la opción porque se ejerció en un momento posterior, condicionado a que no se ha ejercido hasta el momento actual s. Recordemos que contamos con un vector en donde se encuentran las fechas de ejercicio, dicho vector va siendo actualizado conforme recorremos los caminos. Una vez tenemos el valor de la opción descontado a tiempo s para todos los caminos de la simulación (suponiendo que no se ha ejercido la opción en ningún momento previo a s), realizamos una regresión sobre esos valores.

La esperanza condicionada viene dada por la sustitución de las variables de estado de cada camino ω en la regresión cuadrática obtenida. Si ese valor es menor que el del ejercicio inmediato, cambiamos el momento de ejercicio para el camino ω al instante actual s.

Una vez se ha determinado para cada camino de la simulación el instante de ejercicio, tenemos el valor de la opción. El valor de la opción se obtiene como una media de los valores de la opción en los caminos. En concreto para cada camino, buscamos el momento de ejercicio y descontamos el valor de la opción de ese momento al instante actual, mediante la media de esos valores se tiene una estimación del valor buscado.

6.1.2. Valoración con árbol binomial

Valoramos usando un árbol binomial el producto financiero que se ha introducido al inicio de esta sección. De nuevo se ha programado en Matlab [6].

En primer lugar recordemos que nuestro tipo de interés sigue el modelo de Vasicek:

$$dX = (\alpha - \beta X)dt + \sigma dZ$$

Consideramos un *modelo de árbol binomial* en el intervalo temporal $[0, T]$. De forma idéntica al caso anterior, hemos dividido ese intervalo en $T/\Delta t$ intervalos temporales de la misma duración tomando como paso temporal $\Delta t = 1/12$.

Para un modelo de valoración de este tipo en cada instante temporal dado hay diversos estados del mercado. A partir de cada nodo del árbol se podrá ir en el siguiente instante temporal a un estado favorable (up) o a uno desfavorable (down). El número de estados depende del número de pasos que hayamos dado en el árbol (si se han dado n pasos se tendrán $n+1$ estados distintos). Lo anterior ocurre únicamente en el caso en que el árbol sea recombinante, i.e. si partimos desde un estado concreto y avanzamos dos pasos en el tiempo, obtendremos el mismo tipo de interés si seguimos la secuencia up, down que si comenzamos con down y posteriormente salta a un estado up.

[6] Consultar apéndice para código Matlab.

En cada instante y cada estado, se tiene una probabilidad p para ir a un estado del mercado favorable (up) y una probabilidad $q = 1-p$ de ir a un estado desfavorable (down). Para el modelo de Vasicek que estamos considerando, se tiene que la probabilidad p depende del tipo en ese instante de la siguiente manera[7]:

$$p(X) \equiv \frac{1}{2} + \frac{(\alpha - \beta X)\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}$$

Al haber tomado las probabilidades anteriormente definidas, nos aseguramos de que el árbol que nos queda es recombinante. Notemos que la clave para que esto funcione tal y como lo hemos definido es la volatilidad constante, de hecho en cuanto tuviésemos volatilidad no constante el árbol dejaría de ser recombinante.

Recursión para árbol binomial

Este algoritmo de valoración con árbol binomial también ha sido programado en *Matlab* y se ha usado la recursión hacia atrás.

En concreto comenzamos con el momento temporal $(T - 2\Delta t)$ (esto es idéntico a LSM ya que en el instante posterior $(T - \Delta t)$ no tenemos que comparar con la esperanza de continuar sin ejercer pues en T el valor de ejercicio de la opción es cero). En el caso particular de $(T - \Delta t)$ suponemos para todos los estados del mercado que no se ha ejercido con anterioridad y tomamos el valor de la opción como:

$$V_{T-\Delta t} = \text{máx}(-\mathcal{N}\ A_t(s_t - s_0), 0)$$

En un momento temporal cualquiera anterior a $(T - \Delta t)$, supongamos momento t, procedemos de la siguiente forma:

- Calculamos el valor del swap subyacente S_t en ese instante temporal t, recordemos que ese valor es:

$$Swap_t = \mathcal{N}\ A_t(s_t - s_0)$$

- Calculamos el valor que tendría la opción en el momento t en el caso en que continuáramos con la opción sin ejercer en el instante $t + \Delta t$. Dicho valor se calcula mediante el uso de las probabilidades de los estados favorables (up) y desfavorable (down). En concreto se toma el valor de la opción en el instante posterior y en el estado favorable $V^+_{t+\Delta t}$ y el valor de la opción en el instante siguiente pero en el estado desfavorable $V^-_{t+\Delta t}$. Ponemos los pesos $p(r)$ y $(1 - p(r))$ en cada estado y descontamos a momento actual usando el bono cupón cero. Por lo tanto obtenemos que el valor de la opción en t si continuamos sin ejercerla es:

$$V_{cont} = P(t,T)[V^+_{t+\Delta t}p(r) + V^-_{t+\Delta t}(1 - p(r))]$$

- Por último, para el estado del mercado en que nos encontramos ($k = +$ ó $-$) tenemos que el valor de la opción en el momento t sujeto a que no se ha ejercido previamente a ese instante es:

$$V_t^k = max(V_{cont}, -Swap_t, 0)$$

Cuando lleguemos mediante este procedimiento al instante inicial 0, tenemos el valor de la opción de cancelación.

6.1.3. Resultados obtenidos con ambos modelos

Veamos para distintos valores de vencimiento T (con los parámetros descritos anteriormente) los precios de la opción obtenidos mediante los dos modelos de valoración:

VENCIMIENTO	LSM	ÁRBOL BINOMIAL
T=5	0.4281	0.4552
T=7	0.4952	0.5178
T=10	0.5548	0.5748
T=15	0.5988	0.6178

En la tabla anterior comprobamos que los precios obtenidos con los dos métodos son aproximadamente iguales.

6.2. Swap con modelo de dos factores

Suponemos ahora que el *LIBOR* viene dado por la curva de tipos determinada por un modelo simple de dos factores de Vasicek. En particular, asumimos que el interés variable *LIBOR* r es igual a la suma de dos variables de estado, $r = X + Y$. Estas dos variables siguen modelos de Ornstein–Uhlenbeck desacoplados:

$$dX = (\alpha - \beta X)dt + \sigma dZ_1 \tag{28}$$

$$dY = (\gamma - \eta Y)dt + s dZ_2 \tag{29}$$

donde $\alpha, \beta, \sigma, \gamma, \eta$,y s son constantes [7] y Z_1, Z_2 son movimientos Brownianos independientes. El hecho de que los movimiento Brownianos sean independientes es importante, ya que permite integrar las dos ecuaciones anteriores de forma relativamente sencilla [8].

[7] Los valores para los parámetros que se han escogido son $\alpha = 0{,}001, \beta = 0{,}1, \gamma = 0{,}0525, \eta = 1{,}0, \sigma = 0{,}006951, s = 0{,}00867$.

[8] De nuevo consultar apéndice para ver la integración de ese modelo.

En el marco que se ha introducido anteriormente, se han definido un serie de funciones. Estas funciones dependen de dos factores ya que hemos asumido que el LIBOR es $r = X + Y$.

Tenemos pues el valor de un bono cupón cero $P_s(t) = D(X,Y,T)$ en el momento s con vencimiento t (tomando $T = t - s$) dado por:

$$P_s(t) = D(X,Y,T) = \exp(-M(X,Y,T) + V(T)/2) \tag{30}$$

donde

$$\begin{aligned} M(X,Y,T) &= \frac{\alpha}{\beta}T + (X - \frac{\alpha}{\beta})\frac{(1-\exp(-\beta T))}{\beta} \\ &+ \frac{\gamma}{\eta}T + (Y - \frac{\gamma}{\eta})\frac{(1-\exp(-\eta T))}{\eta} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} V(T) &= \frac{\alpha^2}{\beta^2}(T - \frac{2}{\beta}(1-\exp(-\beta T)) + \frac{1}{2\beta}(1-\exp(-2\beta T)) \\ &+ \frac{s^2}{\eta^2}(T - \frac{2}{\eta}(1-\exp(-\eta T)) + \frac{1}{2\eta}(1-\exp(-2\eta T))) \end{aligned} \tag{32}$$

Se han vuelto a generar 2500 caminos, las variables X *e* Y se han tomado antitéticas [9].El algoritmo de valoración es idéntico al caso de un único factor.

Por último, para calcular la esperanza condicionada de nuevo se ha programado una función en Matlab, pero en este caso se han tomado como funciones base una constante, las dos primeras potencias y el producto cruzado de las variables de estado, i.e., X, X^2, Y, Y^2 y XY.

Resultados obtenidos

Para los parámetros indicados y distintos vencimientos se tienen los precios:

VENCIMIENTO	**LSM**
T=5	1.0890
T=7	1.6116
T=10	2.3224
T=15	3.1574

En este caso no se han comparado los precios con los obtenidos con un modelo de árbol binomial pues el hecho de tener un modelo con dos factores aumenta muchísimo la complejidad del mismo.

[9] Consultar *Método Monte Carlo* en apéndice para método de generación de variables aleatorias.

7. Ampliación del estudio

Hasta ahora se han mencionado solo algunos de los swaps que se obtenían al hacer modificaciones del *swap vanilla* convencional. En la práctica, el número de instrumentos financieros está únicamente limitado por la imaginación y el apetito en el mundo financiero por encontrar herramientas innovadoras para cubrir riesgos.

7.1. Index Amortizing Swap e Index Amortizing Swap Cancelable

Un swap que fue muy popular a mediados de los noventa en Estados Unidos es el Inndex Amortizing Swap.

Definición 7.1. Un *index amortizing swap* o también conocido como *index principal swap* es un swap en el cual el nocional principal va decreciendo de forma dependiente con el tipo de interés. Cuanto más bajo es el tipo de interés mayor es el decrecimiento en el nocional.

Debido a dicho decrecimiento del nocional con el tipo de interés, la fecha de vencimiento de un swap de este tipo no es fija ya que si el tipo de interés decrece lo suficiente se podría amortizar todo antes de que llegue el vencimiento, por el contrario si el tipo de interés crece suficientemente se llegará al vencimiento.

Los cambios en el tipo de interés afectan al index amortizing swap de tres formas: 1) directamente a la cantidad pagada en los intercambios de interés futuros; 2) indirectamente afectan a los pagos de interés pues cambia el nocional principal sobre el que se calculan los intereses a intercambiar; 3) alteran el vencimiento del swap.

Este producto derivado ampliamente utilizado en Wall Street en los últimos años, es uno de los productos derivados sobre tipos de interés más difíciles de valorar y de medir su riesgo asociado. Lo anterior es debido a que el nocional va decreciendo conforme avanza el tiempo muchas veces de forma compleja. Por ejemplo, los index amortizing swaps normalmente tienen nominales que se amortizan en base a una función no lineal dependiente del tipo Constant Maturity Treasury (CMT) o bien del tipo Constant Maturity Swap (CMS). Esta amortización estocástica convierte a estos productos derivados en productos altamente dependientes del camino. De hecho, los swaps anteriores (index amortizing swaps) son aún más complejos cuando una de las contrapartidas tiene el derecho de cancelar el mismo en cualquier momento, *index amortizing swap cancelable*.

Definición 7.2. Un *index amortizing swap cancelable* consta de un index amortizing swap y una opción de cancelación Americana.

Es importante notar que para evaluar y determinar la forma óptima de ejercicio en el caso de los index amortizing swaps cancelables se puede hacer uso de la técnica descrita con anterioridad LSM. Dicha técnica es ventajosa pues de nuevo contamos con un producto derivado de tipo americano (opción de cancelación).

Al igual que los *swap vanilla,* los *index amortizing swaps* se usan para cubrir riesgos. De hecho sirven para cubrir riesgos de una hipoteca o imitar los flujos de caja de la misma; la característica de amortización de un index amortizing swap sigue el mismo patrón que un modelo de prepago de una hipoteca.

Normalmente los *index amortizing swaps* siguen la convención del mercado de intercambio de pagos cada tres o cada seis meses, donde el interés variable a pagar en un intervalo temporal se determina al inicio del mismo y se paga al final (esto es idéntico al caso que hemos estudiado de *swaps vanilla*). Los *index amortizing swaps cancelables* por lo general solo se pueden cancelar en una fecha de pago de un cupón y únicamente después del intercambio de las pertinentes cantidades de dinero, tanto interés fijo como variable (de nuevo esto es un supuesto que habíamos introducido para el caso del *swap cancelable*).

Para una ampliación de este trabajo sería muy interesante un estudio más detallado de los dos productos financieros arriba descritos. Se podría hacer uso del método de LSM para obtener un precio razonable de los mismos.

8. Conclusión

En este trabajo se ha estudiado el método LSM (Least Squares Monte Carlo) para calcular el precio de opciones de tipo Americano mediante el uso de simulación combinado con técnicas de regresión. Esta aproximación es muy intuitiva, precisa, relativamente fácil de implementar y computacionalmente eficiente. Además, la simulación Monte Carlo permite abordar opciones de tipo exótico que no son tratables por medio de árboles binomiales recombinantes, o son difíciles de implementar utilizando métodos numéricos en EDPs. Sin embargo, la simulación por sí sola puede no ser adecuada para valorar opciones de tipo americano, ya que se debe estimar también la *frontera de ejercicio*. La combinación con métodos de regresión permite una solución eficiente de este problema, y ha dado gran popularidad a este algoritmo.

El método se ha implementado para valorar la *opción de cancelación* de un contrato swap, cuyas características son idénticas a los contratos con opcionalidad Americana. Este tipo de opciones se encuentran también incluidas en los llamados *bonos redimibles* (en los que el emisor tiene derecho a recomprar el bono en unas fechas especificadas), hipotecas con cláusulas de prepago y en todo instrumento que permita una cancelación anticipada. Los swap son instrumentos financieros muy versátiles y son altamente comercializados en la actualidad. Un *swap cancelable* involucra otra opción, pues es la suma de un swap regular vainilla más una opción Bermuda.

La valoración también se ha realizado por medio de un modelo binomial, en concreto usando un modelo de Vasicek de un factor, que ha sido comparado con el precio obtenido por la simulación LSM, para posteriormente pasar a implementar la simulación con un modelo de Vasicek de varios factores.

Desde el punto de vista de manejo de riesgos de derivados financieros, la simulación tiene muchas ventajas. El hecho de poder valorar opciones Americanas aplicando esta técnica, la hace mucho más extensible y prometedora especialmente cuando hablamos de modelos de varios factores o de instrumentos con definiciones complejas que incluyen opciones americanas en su especificación (véase [6]).

Glosario

- Activo financiero: un *activo financiero* es un instrumento que canaliza el ahorro hacia la inversión. Se materializa en un contrato realizado entre dos partes, que pueden ser personas físicas o jurídicas.

- Arbitraje: también conocido como *principio de no arbitrariedad.* En general, un *arbitraje* es una estrategia de actuación que permitiría empezar sin dinero y, tras la compra/venta de ciertos activos, terminar con dinero con probabilidad uno.

- Árbol binomial: un *árbol binomial* es un árbol que representa cómo puede evolucionar el precio de un activo según un modelo binomial.

- Bono: un *bono* es un instrumento financiero de deuda utilizado por entidades privadas y también por entidades gubernamentales y que sirve para financiar a las mismas empresas. El bono es una de las formas de materializarse los títulos de deuda, de renta fija o variable.

- Bono cupón cero: un *bono cupón cero* de vencimiento T es contrato financiero por el cual la contrapartida nos paga una unidad monetaria dentro a tiempo$T$ sin flujos intermedios; a cambio debemos pagar hoy una cantidad x. El valor del contrato a tiempo t, $t < T$ se denota por $P_t(T)$. Se tiene que:
$$P_t(T) > 0 \ \forall t \leq T$$
$$P_{t=T}(T) = 1 \ \forall \text{ estado del mercado}$$

- Constante Maturity Swap (CMS): Un «constant maturity swap» es un producto derivado del tipo de interés que es una modificación del swap vanilla. La parte de interés variable es el tipo swap correspondiente a un intervalo de fechas que comienzan en el instante actual y tienen un horizonte temporal fijo (véase Brigo Mercurio [1] página 557).

- Commercial paper rate: letra de cambio con vencimiento fijo no superior a 270 días.

- Contrapartida: la otra parte en una transacción financiera.

- *Derivado financiero:* también conocido como *producto derivado*, es un producto financiero cuyo valor depende del valor de otro activo (subyacente). El subyacente usado puede ser muy diferente: acciones, índices bursátiles, tipos de interés, materias primas (commodities),...

- FRA o *Forward Rate Agreement,* es uno de los derivados sobre el tipo de interés más elementales. El *FRA* es un instrumento similar al contrato *forward* para la compra de un activo, pero que se firma cobre el interés a aplicar en un intervalo futuro, en lugar de ser sobre un activo comercializable. Es decir, el *FRA* fija un valor para un determinado tipo de interés mientras que el *forward* lo fija para el precio de un activo.

- Modelo de Black-Scholes: modelo diseñado para valorar opciones de tipo europeo, desarrollado por Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton.

- Opción Americana: opción cuyo ejercicio puede llevarse a cabo antes de la fecha de vencimiento. De forma más específica, una cláusula de ejercicio previo (equivalente a opción Americana) permite al comprador del producto derivado reclamar el valor intrínseco definido en el contrato en el momento que él decida hacerlo, siempre y cuando esto sea antes que el vencimiento del contrato[**?**]. En tal caso, en cada momento hay un pay-off que viene determinado por el valor del subyacente. Aunque puede darse el caso que con un pay-off positivo no se ejerza la opción porque convenga más ejercerla en el futuro.

- Opción exótica: tipo de opción que no es estandard.

- Over-the-counter: mercado over-the-counter (también conocido como mercado OTC), es el mercado libre no reglado. No existe normalización de contratos, si no que estos están hechos «a medida». Tampoco existe un órgano regulatorio de compensación y liquidación que medie entre las partes y garantice el cumplimiento de ambas partes.

- Pay-off: cobro al que da lugar una opción en el momento de ejercicio por parte del comprador. En el día de vencimiento de la opción el pay-off es igual al valor de la opción.

- Pseudoaleatorio: Una secuencia de números es pseudoaleatoria si cualquier secuencia finita, seleccionada previamente a su diseño, es igualmente factible que esté incluida en aquélla.

- Subyacente:activo al que se refiere el producto derivado.

- Swaplet: porción del instrumento financiero Swap que recoge los pagos en un periodo concreto.

Apéndice

Simulación Monte Carlo

La simulación Monte Carlo parte de que es conocida la distribución de la variable aleatoria en estudio.

Comenzamos generando variables aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Todos lo métodos de generación de *variables aleatorias* parten de la generación de variables de este tipo, por ello este es el primer paso de nuestra simulación. La mejor forma de obtener números aleatorios es la ruleta pero eso es infactible. Existen tablas de números aleatorios generados mediante el método de la ruleta pero el uso de las mismas no es práctico. Por lo tanto es necesario el uso de métodos aritméticos para poder generar dichos valores, aunque ya no serían aleatorios si no *pseudoaleatorios*.

Generación de muestras uniformes

Se ha programado el *método congruencial* para la generación de tales números *pseudoaleatorios*. Veamos en qué consiste dicho método:

Sean a, $b \in \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ está generada por el método congruencial si y solo si

$$x_{n+1} \equiv ax_n + b$$

donde $x_n \in \{0, ..., m-1\} \forall n = 0, 1, ...$, siendo x_0 la semilla de la sucesión que ha sido fijado a 123456789, *a* m se le denomina módulo y a *a multiplicador*. Tomamos $b = 0$ por lo que tenemos un *generador multiplicativo*, además de los valores $m = 2^{31} - 1$ y $a = 16807$.

Como el fin es obtener muestras uniformes en el intervalo $(0,1)$ dividimos cada número generado por el módulo m, con lo que la muestra obtenida se puede considerar uniforme en dicho intervalo.

Es evidente que este método genera números a gran velocidad, además de ser reproducible (bastaría con elegir una misma semilla). Las propiedades importantes de uniformidad e independencia se obtienen mediante la correcta elección de los parámetros. Para esa elección se han realizado contrastes de independencia y bondad de ajuste para la uniformidad [10].

Método de generación de variable aleatoria Normal(μ, σ)

Para la generación de variables aleatorias Normal(0,1) se ha programado el método de Box-Müller. Este método se basa en una transformación de variables aleatorias uniformes(0,1), de tal forma que si u_1, u_2 son v.a.i.i.d entonces $x =$

$\sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ e $y = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$ son v.a.i.i.d. con distribución $N(0,1)$.

Por lo tanto el procedimiento que se ha seguido es:

1. Generar $u_1, u_2 \in U(0,1)$ mediante el *método congruencial*.
2. Obtener $x = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2)$ e $y = \sqrt{-2\ln u_1}\sin(2\pi u_2)$, v.a.i.i.d. $N(0,1)$.

De hecho se han generado cuatro variables aleatorias normales haciendo uso de variables antitéticas (usamos los valores de la uniforme y sus complementarios, es decir, en cada paso: $u_1, u_2, 1-u_1, 1-u_2$), y se han tomado en cada instante de la simulación las dos antitéticas que estaban correladas negativamente. Las otra pareja de variables antitéticas no cumple esta propiedad y no se han usado.

Integración de procesos estocásticos. El proceso de Ornstein-Uhlenbeck

La integración de un proceso estocástico del tipo Ornstein-Uhlenbeck se basa en el uso de Itô.

Supongamos que tenemos un proceso de la siguiente forma:

$$dX_t = -\gamma X_t dt + \sigma dB_t$$

donde γ y σson constantes positivas. El hecho de que no aparezca $X_t$delante de la parte estocástica de la ecuación σdB_t hace que no estemos frente a un proceso geométrico Browniano.

Para obtener la solución comenzamos observando que la solución general de una ecuación estocástica $dX_t = -\gamma X_t$ es $X_t = ce^{-\gamma t}$. Por lo tanto, esperamos que la naturaleza estocástica de la ecuación sea parecida a lo anterior y buscamos una solución que sea parecida. Tomamos:

$$X_t = U_t e^{-\gamma t} \Rightarrow U_t = X_t e^{\gamma t}$$

por lo tanto aplicando Itô a lo anterior tenemos:

$$dU_t = d(e^{\gamma t}X_t) = \gamma e^{\gamma t}X_t dt + e^{\gamma t}dX_t =$$

$$\gamma e^{\gamma t}X_t dt + e^{\gamma t}(-\gamma X_t dt + \sigma dB_t) =$$

$$\sigma e^{\gamma t}dB_t$$

de lo anterior deducimos

$$U_t = U_0 + \sigma \int_0^t e^{\gamma s} dB_s$$

así

$$X_t = e^{-\gamma t} U_t = X_0 e^{-\gamma t} + \sigma \int_0^t e^{\gamma (s-t)} dB_s$$

Código MATLAB

Modelo de un factor con Árbol Binomial:

```
% éste es para implementar el modelo de Vasicek en un árbol binomial
% los parámetros son: beta y mu, pero en el artículo LS son alfa y beta
% beta*mu = alfa (izquierda es la presentación, derecha LS)
% las betas son iguales, entonces mu = alfa/beta
% trabajamos con beta y mu

Nominal = 100;
np = 12; % pasos por año
Tv = 15; % tiempo de vencimiento del swap
r0 = 0.05;
sigma = 0.00867; % volatilidad de Y
beta= 1; % éste es el eta del otro programa, es decir, el parámetro del proceso Y
% gamma y eta son los parámetros de Y en el otro programa
mu = 0.0525/beta; % el numerador es el gamma del otro programa
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dt = 1/np; sdt = sqrt(dt);
fechasp = (dt:dt:Tv); %éstas son las fechas de pago del swap
N = Tv*np; %nro. pasos totales para llegar a vencimiento
dsigma = 2* sigma;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% función de probabilidad
p =@(r) 1/2 + beta*(mu - r)*sdt/dsigma;
sigsdt = sigma*sdt;
% generamos el árbol de tipos a corto plazo
r = zeros(N,N);
r(1,1) = r0;
for k = 2:N
    r(1:k,k) = [r(1,k-1) - sigsdt; r(1:k-1,k-1) + sigsdt];
end

f = @(x) x.*heaviside(x) + (1-x).*heaviside(x-1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% solución explícita para calcular el tipo swap
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B = @(t,T) (1-exp(-beta*(T-t)))/beta;
A = @(t,T) exp(((B(t,T)-T+t).*(beta^2*mu-sigma^2/2))/beta^2 - (sigma^2*B(t,T).^2)/(4*beta));
P = @(r,t,T) A(t,T).*exp(-B(t,T).*r);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% definir swap s0 inicial
```

```
Annuity = sum(dt * P(r0,0,fechasp));  %annuity
s0 = (1 - P(r0,0,Tv))/Annuity; % tipo swap inicial (que es el "strike" de la opción de cancelación).
poff = max(- (r(:,N) - s0),0).*P(r(:,N),Tv-dt,Tv)*Nominal;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%Valoración %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
V = poff;
fechas = [0,fechasp];
% vamos hacia atrás
for k=N-1:-1:1
    R = r(1:k,k);
    D = P(R,fechas(k),fechas(k+1)); % debería ser parecido a 1/(1+r*dt)
    q = f(p(R));
    Vcont = D.*(V(2:k+1).*q + V(1:k).*(1-q));
     % valor de ejercicio inmediato
     % cálculo de la anualidad
    Annuity = zeros(k,1);
    for j = k+1: length(fechas)
        Annuity = Annuity + dt * P(R,fechas(k),fechas(j));
    end
    st = (1 - P(R,fechas(k),Tv))./Annuity;
    V = max(Vcont,max(- (st - s0).*Annuity*Nominal,0));
end
V
```

Modelo de un factor con LSM:

```
%Trabajo Fin de Máster
%Cecilia Perez Mazuela
clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%DATOS:
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0=123456789; %semilla para generar numeros aleatorios
alpha= 0.0525; beta= 1; sigmaa= 0.00867;
%Para compatibilizar con programa de arbol binomial
mu = alpha/beta;
%------------------------------------------------------------------------
T=5;      %vencimiento
n=2500;   %número de simulaciones
X_0=0.05; %The initial values of X
N=100;    %initial notional amount
deltat=1/12; %paso temporal
npasos=T/deltat;
fechas = [deltat:deltat:T]; %fechas de pago

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% solución explícita para calcular el tipo swap
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
B = @(t,T) (1-exp(-beta*(T-t)))/beta;
A = @(t,T) exp(((B(t,T)-T+t).*(beta^2*mu-sigmaa^2/2))/beta^2 - (sigmaa^2*B(t,T).^2)/(4*beta));
P = @(r,t,T) A(t,T).*exp(-B(t,T).*r);
```

```
%Calculo las X (tipos de interés)
for i=1:n %numero total de simulaciones que realizamos
    X(i,1)=X_0;
    for k=2:(npasos+1) %En cada paso hago n generaciones
         [u1,x0]= congruencial(x0);
         [u2,x0]= congruencial(x0);
         [x1,y1,xant,yant] = Boxmuller(u1,u2);

         %Usamos la var y, yant (es decir las variables antiteticas)
         X(i,k)=X(i,k-1)+(alpha-X(i,k-1))*(1-exp(-deltat))+ sigmaa*sqrt((1-exp(-2*deltat))/2)*y1;
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% definir swap s0 inicial
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Annuity = sum(deltat * P(X_0,0,fechas));  %annuity
s0 = (1 - P(X_0,0,T))/Annuity; % tipo swap inicial (que es el "strike" de la opción de cancelación).

% guardamos valor de cancelar el camino i en instante k en Cancel(i,k):
Cancel = zeros(n,npasos);
% momentos(camino) instante temporal donde se ejerce la opción en ese camino
momentos=(T-deltat)*ones(n,1);
%posicion que ocupa ese instante 59,58,...,1
pos=ones(n,1)*(npasos-1);


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%       Recursion hacia atras
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Momento T-deltat== npasos-1
hoy = fechas(npasos-1);
tpagos=fechas(end);
for i=1:n
    Annuity = sum(deltat * P(X(i,npasos),hoy,tpagos));
    st =(1 - P(X(i,npasos),hoy,T))/(Annuity); % tipo swap en el instante hoy y en el camino i
    Cancel(i,npasos-1) = N * Annuity * max( - ( st - s0 ),0);
end

for k=(npasos-2):-1:1  %(T-2*deltat):-deltat:0
    %valores de X y Z para la regresion
    Xreg=[]; Zreg=[];
    hoy= fechas(k);
    tpagos = fechas(k+1:end); % momentos en los que hay pagos

    for i = 1:n
         %Actualizo valor cancelacion en instante k
         Annuity = sum(deltat * P(X(i,k+1),hoy,tpagos));
         st =(1 - P(X(i,k+1),hoy,T))/(Annuity); % tipo swap en el instante hoy y en el camino i
         Cancel(i,k) = N * Annuity * max( - ( st - s0 ),0);

         if (Cancel(i,k)>0) %solo caminos que estan in the money
            Xreg=[Xreg X(i,k+1)]; %sumo uno porque en X e Y estan X_0 e Y_0
            Zreg=[Zreg Cancel(i,pos(i))*P(X(i,k+1),hoy,momentos(i))]; %busco valor donde se ejercio
         end
```

```
    end

    if (length(Xreg)>=1)    %realizo una regresion de X sobre Z
        mdl = polyfit(Xreg,Zreg,2);  %coeficientes del modelo

        for i=1:n
            if (Cancel(i,k)>0)   %esta in the money
                esperanza=polyval( mdl, X(i,k+1));  %esperanza condicionada
                if (Cancel(i,k)>esperanza)% comparacion con la esperanza condicionada
                    momentos(i)=hoy;    %ejercemos en este instante
                    pos(i)=k;
                end
            end
        end
    end
end

media=0;%Valor opcion:
for i=1:n
    media= media+Cancel(i,pos(i))*P(X_0,0,momentos(i));
end
media=media/n;
```

Modelo dos factores con LSM:

```
%Trabajo Fin de Máster
%Cecilia Perez Mazuela
clear all
clc
%-------------------------------------------------------------------------
%DATOS:
x0=123456789;  %semilla para generar numeros aleatorios
alpha= 0.001; beta= 0.1; sigmaa= 0.006951;
gamma = 0.0525; eta= 1.00; s = 0.00867;
%The initial values of X and Y are
X_0=0.002; Y_0=0.050;
N=100;  %initial notional amount
%-------------------------------------------------------------------------
T=5;     %vencimiento
n=2500;  %numero de simulaciones
deltat=1/12;
npasos=T/deltat;
%parámetros del programa
pars = [alpha, beta, eta, gamma, sigmaa, s];
fechas = [deltat:deltat:T];  %fechas de pago
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Simulacion de X e Y
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i=1:n
    X(i,1)=X_0;
    Y(i,1)=Y_0;
    for k=2:(npasos+1)  %En cada paso hago n generaciones
         [u1,x0]= congruencial(x0);
         [u2,x0]= congruencial(x0);
```

```
        [x1,y1,xant,yant] = Boxmuller(u1,u2);

        %Usamos la var y, yant (es decir las variables antiteticas)
        X(i,k)=X(i,k-1)+(alpha-X(i,k-1))*(1-exp(-deltat))+ sigmaa*sqrt((1-exp(-2*deltat))/2)*y1;
        Y(i,k)=Y(i,k-1)+(gamma-Y(i,k-1))*(1-exp(-deltat))+ s*sqrt((1-exp(-2*deltat))/2)*yant;
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% definir swap s0 inicial
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
PN=D(X_0,Y_0,T,pars);
A = sum(D(X_0,Y_0,fechas,pars))*deltat;   %annuity
K =(1 - PN)/(A);     %valor K que firmas al principio

% guardamos valor de cancelar el camino i en instante k en Cancel(i,k):
Cancel = zeros(n,npasos);
% momentos(camino) instante temporal donde se ejerce la opción en ese camino
momentos=(T-deltat)*ones(n,1);
%posicion que ocupa ese instante 59,58,...,1
pos=(npasos-1)*ones(n,1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%       Recursion hacia atras
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Momento T-deltat== npasos-1
hoy = fechas(npasos-1);
tpagos=fechas(end);
for i=1:n
    Pt = D(X(i,npasos),Y(i,npasos),tpagos - hoy,pars);
    A = sum(Pt)*deltat;
    st =(1 - Pt(end))/A; % tipo swap en el instante hoy y en el camino i
    Cancel(i,npasos-1) = N * A* max( - ( st - K ),0);
end

for k=(npasos-2):-1:1  %(T-2*deltat):-deltat:0
    Xreg=[]; %valores de X que uso para la regresion
    Yreg=[]; %valores de Y que uso para la regresion
    Zreg=[];
    hoy= fechas(k);
    tpagos = fechas(k+1:end); % momentos en los que hay pagos

    for i=1:n
        Pt = D(X(i,k+1),Y(i,k+1),tpagos - hoy,pars);
        A = sum(Pt)*deltat;
        st =(1 - Pt(end))/(A); % tipo swap en el instante hoy y en el camino i
        Cancel(i,k) = N * A * max( - ( st - K ),0);
        if (Cancel(i,k)>0)
            %momentos(i) cuando se ejercio la opcion
            Xreg=[Xreg X(i,k+1)]; %sumo uno porque en X e Y estan X_0 e Y_0
            Yreg=[Yreg Y(i,k+1)];
            Zreg=[Zreg Cancel(i,pos(i))*D(X(i,k+1),Y(i,k+1),momentos(i) - hoy, pars)]; %busco valor
        end
    end

    %realizo una regresion de X e Y sobre Z
    beta0 = [0.1 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1]; %valor inicial para los parametros
    tbl=[Xreg',Yreg'];
```

```
    mdl = nlinfit(tbl,Zreg, @modelfun,beta0); %coeficientes del modelo

    for i=1:n
        if (Cancel(i,k)>0)   %esta in the money
            esperanza=modelfun( mdl, [X(i,k+1), Y(i,k+1)]); %esperanza condicionada
            if (Cancel(i,k)>esperanza) %comparacion con esperanza condicionada
                momentos(i)=hoy;   %ejercemos en este instante
                pos(i)=k;
            end
        end
    end
end

media=0;
for i=1:n
    media= media+Cancel(i,pos(i))*D(X_0,Y_0,momentos(i), pars);
end
media=media/n;
```

Referencias

[1] Brigo, D. y Mercurio, F.. «Interest Rate Models- Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit», Springer Finance, Second edition.

[2] Fitt, A.D., Howls, C.J., and others. Mathematical Finance, University of Southampton, January 21, 2013.

[3] Galaif, L. N.. « Index Amortizing Rate Swaps». FRBNY Quarterly Review/Winter 1993-94, pp 63-70.

[4] Hull, J. C.. «Options, Futures and other derivatives», sixth edition, Pearson.

[5] Korn,E. y Korn, R.. Management Mathematics for European Schools , Evaluación de opciones. Fecha de consulta:07/09/2014. Disponible en: http://optimierung.mathematik.uni-kl.de/mamaeusch/veroeffentlichungen/ver_texte/bm_option_s.pdf.

[6] Longstaff, F. A. y Schwartz E. S.. «Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach», The Review of Financial Studies, Spring 2001 Vol. 14, Nº1, pp 113-147.

[7] Nelson, D.B. y Ramaswamy, K.. «Simple Binomial Processes as Diffusion Approximations in Financial Models», The Review of Financial Studies, Vol. 3, No. 3 (1990), pp. 393-430 Published by: Oxford University Press. Sponsor: The Society for Financial Studies.

[8] Oleaga, G. «Notas del Curso de Tipos de Interés 2014», en Máster de Ingeniería Matemática UCM.

[9] Vasicek, O.. «An equilibrium Characterization of the Term Structure», Journal of Financial Economics 5, 177-188.

[10] Vitoriano, B.. «Notas del curso de Técnicas de Simulación 2014», Máster de Ingeniería Matemática UCM.